**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №5**

**по дисциплине «Теория принятия решений»**

Тема: Вычисление расстояния между кривыми на плоскости

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 6382 |  | Мартыненко П.П. |
| Преподаватель |  | Сучков А.И. |

Санкт-Петербург

2020

**Цель работы.**

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

**Основные теоретические положения.**

Метод множителей Лагранжа.

Стандартная условно-экстремальная задача формулируется следующим образом: найти минимум функции (критерия) при наличии ограничений (1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

или коротко (2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

Основной аналитический метод решения связан с введением вектора множителей Лагранжа и построением составного критерия (функции Лагранжа) (3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

или в более подробной записи (4)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

Экстремум этой функции ищется обычным образом путем взятия производных и приравнивания их нулю. Тем самым исходная условно-экстремальная задача сводится к задаче отыскания безусловного экстремума.

Применение вариационного исчисления.

Методы Ферма и Лагранжа позволяют аналитически решать конечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от конечного числа неизвестных. Более трудны для решения бесконечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от неизвестной функции . Такие задачи решают методами вариационного исчисления.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Требуется найти кривую , проходящую через две заданные точки , и доставляющую экстремум функционалу (5):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

Эйлер доказал, что искомая кривая удовлетворяет уравнению (уравнение Эйлера) (6):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

Уравнение Эйлера представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, семейство решений которого содержит экстремальную кривую .

Следует заметить, что уравнение Эйлера не дает окончательного решения поставленной задачи, а лишь выделяет класс кривых, подозрительных на экстремум. Ситуация здесь вполне аналогична поиску экстремума функции путем ее дифференцирования, когда экстремум может оказаться либо в одной из точек, где производная равна нулю, либо на краях интервала.

**Постановка задачи.**

Найти двумя способами расстояние между двумя фигурами на плоскости (методом множителей Лагранжа и при помощи вариационного исчисления).

**Индивидуализация.**

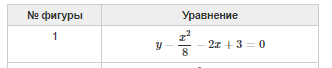
Вариант 1.



Фигура1



Фигура 2



**Выполнение работы.**

С помощью инструментального средства согласно варианту были построены фигуры в одной плоскости (см. рис. 1). Исходные уравнения представлены в (7).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

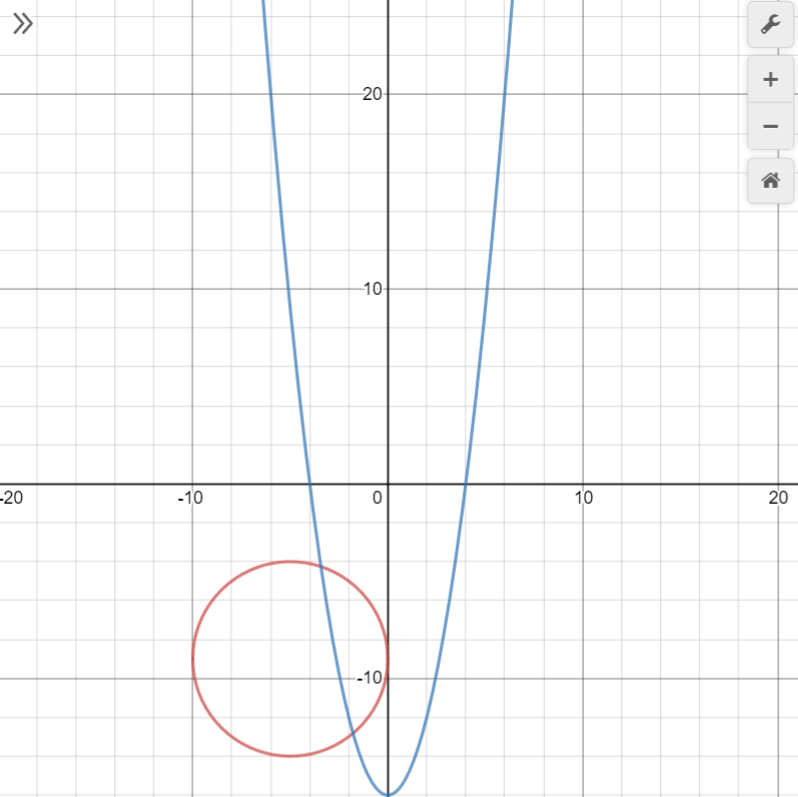


Рисунок 1 – Построение фигур

Т.к. фигуры пересекаются, путем переноса центра окружности в точку получено расстояние между фигурами (см. рис. 2). Измененные уравнения представлены в (8).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

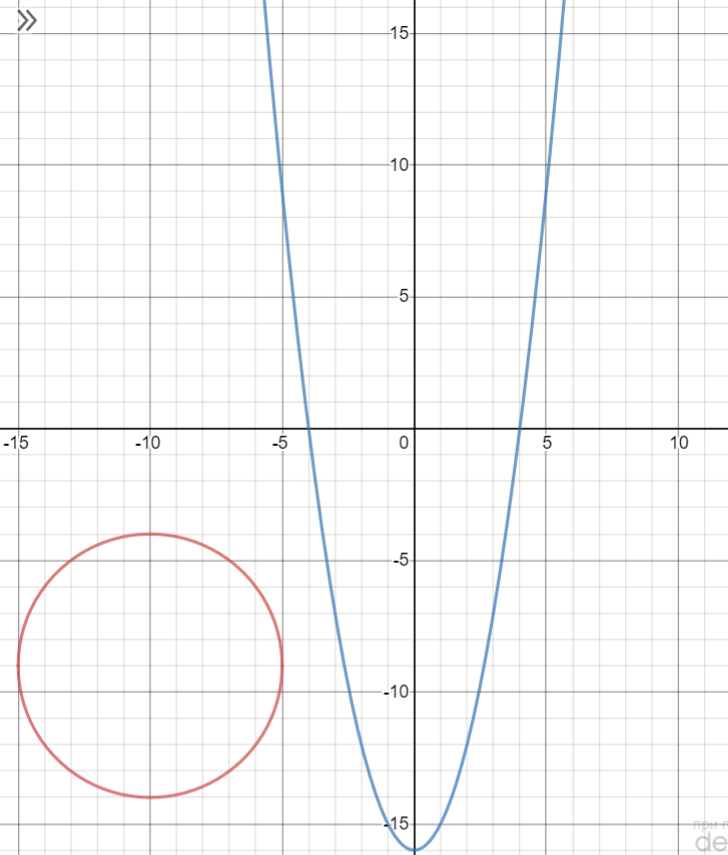


Рисунок 2 – Построение измененных фигур

Было вычислено расстояние между фигурами методом неопределенных множителей Лагранжа.

Пусть и – концы отрезка, являющимся расстоянием между окружностью и параболой, лежит на окружности, лежит на параболе. Тогда функция Лагранжа примет следующий вид (9):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , | (9) |

где – множители Лагранжа.

Была составлена следующая система уравнений (10):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

Решением системы (11) является:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11) |

C помощью разработанной программы (см. Приложение А) было рассчитано минимальное расстояние между кривыми (12):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

Применение вариационного исчисления.

Известно, что расстоянием между фигурами на плоскости будет прямая, имеющая следующий вид (13):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13) |

Была составлена следующая система уравнений (14):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14) |

Решением системы (15) является:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (15) |

В соответствии с (15), уравнение прямой (13) имеет вид (16):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | (16) |

Построение прямой, отрезок на которой является расстоянием между фигурами, представлен на рис. 3.

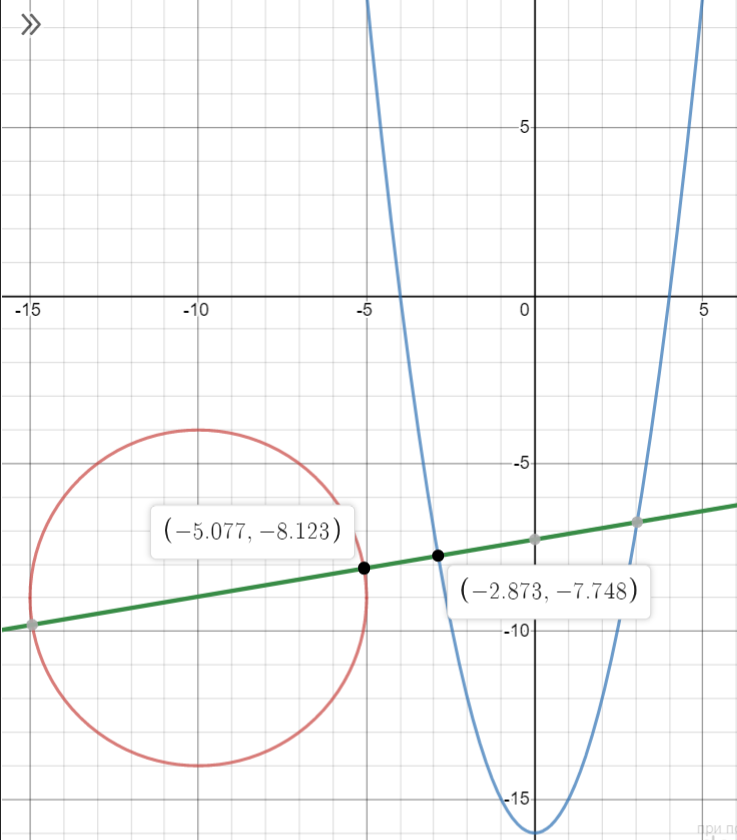


Рисунок 3 – Расстояние между фигурами

C помощью разработанной программы (см. Приложение А) было рассчитано минимальное расстояние между кривыми (17):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (17) |

**Выводы.**

В ходе данной лабораторной работы были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также получены навыки принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

При решении данной задачи методом неопределенных множителей Лагранжа были найдены точки на прямой, являющиеся концами отрезка-расстояния между кривыми. Благодаря нахождению частных производных и приравниванию их к нулю была составлена система уравнения для нахождения множителей Лагранжа с последующим нахождением координат точек. Расстояние между двумя точками вычислялось как корень из суммы квадратов разности каждой из координат.

При решении данной задачи методом вариационного исчисления был взято минимальное решение функционала как минимальное расстояние между кривыми. Благодаря условию трансверсальности была составлена система уравнений для нахождения коэффициентов прямой, отрезок на которой является расстоянием между кривыми, а также ограничений для нахождения значений Расстояние между двумя точками вычислялось как корень из суммы квадратов разности каждой из координат.

Найденное обоими способами расстояние между кривыми имеет одинаковое значение. При построении прямой с применением вариационного исчисления точки, полученные в методе неопределенных коэффициентов Лагранжа, принадлежат данной прямой. Полученный результат не противоречит геометрическому рисунку на плоскости, что также подтверждает правильность решения.

Приложение А

вЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ КРИВЫМИ

**from** scipy.optimize **import** fsolve  
**from** math **import** sqrt  
**from** sympy **import** symbols,diff,nsolve  
 *#Метод вариационного исчисления***def** equations(p):  
 x,y,c,d = p  
 eq1 = (x+10)\*\*2+(c\*x+d+9)\*\*2-25  
 eq2 = sqrt(1+c\*\*2)-c\*((x+10)/(c\*x+d+9)+c)/sqrt(1+c\*\*2)  
 eq3 = c\*y+d-y\*\*2+16  
 eq4 = sqrt(1+c\*\*2)+c\*(2\*y-c)/sqrt(1+c\*\*2)  
 **return** (eq1, eq2, eq3, eq4)  
  
x, y, c, d = fsolve(equations, (-9,0,1,1))  
x, y, c, ddistance = sqrt(1+c\*\*2)\*(y-x)  
distance  
 *#Метод неопределенных множителей Лагранжа*x1,y1,x2,y2,lambda1,lambda2 = symbols(**'x1 y1 x2 y2 lambda1 lambda2'** )  
f=(x1-x2)\*\*2+(y1-y2)\*\*2  
curve1=(x1+10)\*\*2+(y1+9)\*\*2-25  
curve2=y2-x2\*\*2+16  
L=f+lambda1\*curve1+lambda2\*curve2fx1=L.diff(x1); fx2=L.diff(x2)  
fy1=L.diff(y1); fy2=L.diff(y2)  
fl1=L.diff(lambda1); fl2=L.diff(lambda2)  
s=nsolve([fx1,fy1,fx2,fy2,fl1,fl2], (x1,y1,x2,y2,lambda1,lambda2), (-3,-8,-5,-8,1,1))  
s[0],s[1],s[2],s[3],s[4],s[5]d=(sqrt((s[0]-s[2])\*\*2+(s[1]-s[3])\*\*2))  
d